ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ ПРОСТРАНСТВА, В КОТОРЫХ ВСЕ АРХИМЕДОВЫ КОНУСЫ ЗАМКНУТЫ

Гутман Александр Ефимович

Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН
(проект № FWNF-2022-0004)

Конусы и упорядоченные векторные пространства

Всюду ниже X — векторное пространство над $\mathbb{R}$.

Непустое выпуклое множество $K \subseteq X$ называется *клином*, если $(\forall\, \alpha \geqslant 0)\ \alpha K \subseteq K$. Клин K — *конус*, если $K \cap (-K) = \{0\}$.

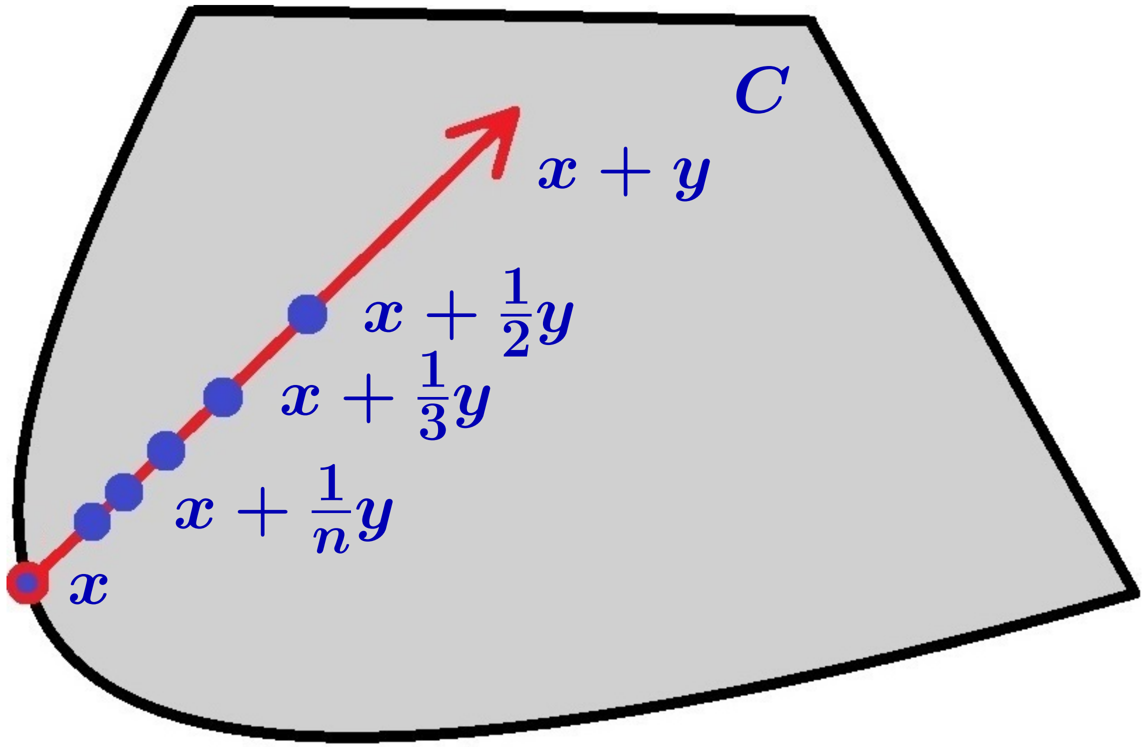
(*Пред*)*упорядоченное векторное пространство* — это пара $(X, \leqslant)$, где $\leqslant$ — такое отношение (пред)порядка на X, что $(\forall\, x, y, z \in X)(\forall\, \lambda \geqslant 0)(x \leqslant y \ \Rightarrow\ x + z \leqslant y + z,\ \lambda x \leqslant \lambda y)$.
При этом $X^+ := \{x \in X : x \geqslant 0\}$ является конусом (клином).

Наоборот, любому конусу (клину) $K \subseteq X$ соответствует (пред)порядок $x \leqslant_K y \Leftrightarrow y - x \in K$, превращающий X в (пред)упорядоченное вект. пространство, для которого $X^+ = K$.

Конус (клин) $K \subseteq X$ называется *архимедовым*, если архимедово (пред)упорядоченное вект. пространство $(X, \leqslant)$, где $\leqslant\ :=\ \leqslant_K$, т. е. если $(\forall\, x, y \in X)\big(\, y \geqslant 0,\ (\forall\, n \in \mathbb{N})(x \leqslant \frac{1}{n} y) \ \Rightarrow\ x \leqslant 0\,\big)$.

Архимедовы и направленно замкнутые выпуклые множества

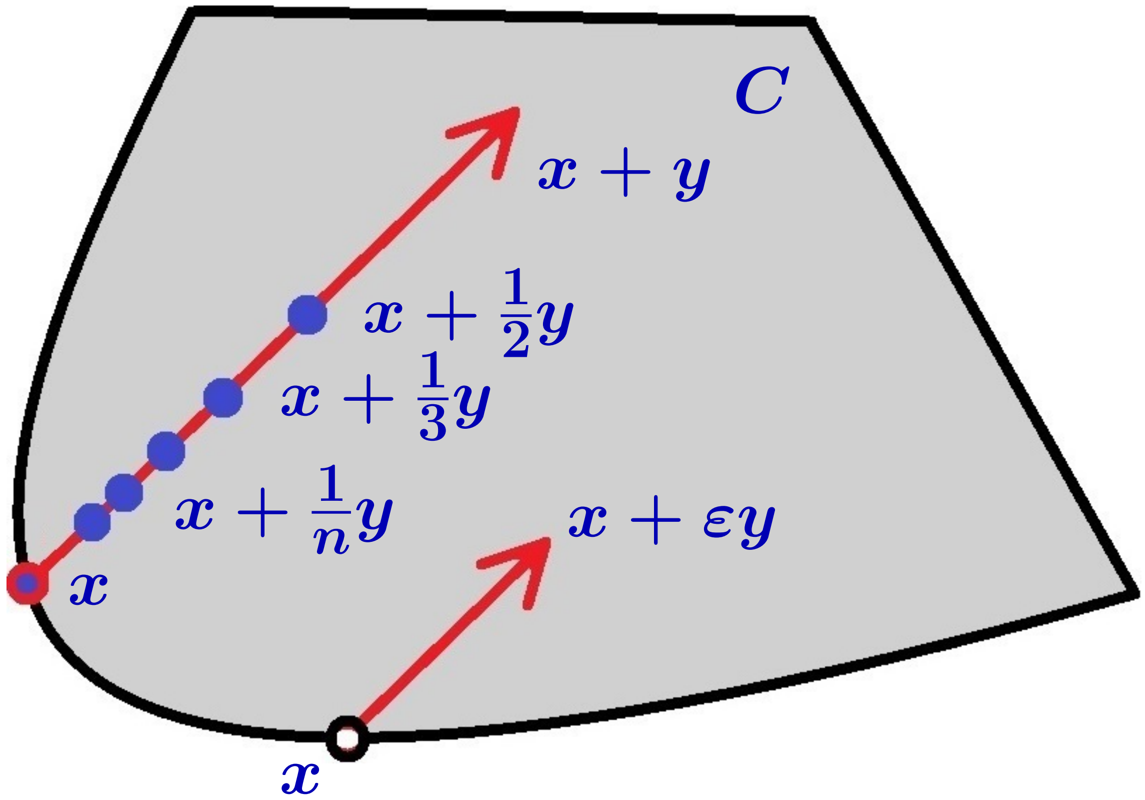
Выпуклое множество $C \subseteq X$ называется ***архимедовым***, если $(\forall\, x, y \in X)\Big(\,(\forall\, n \in \mathbb{N})(x + \frac{1}{n}y \in C) \;\Rightarrow\; x \in C\,\Big)$.



Архимедовы и направленно замкнутые выпуклые множества

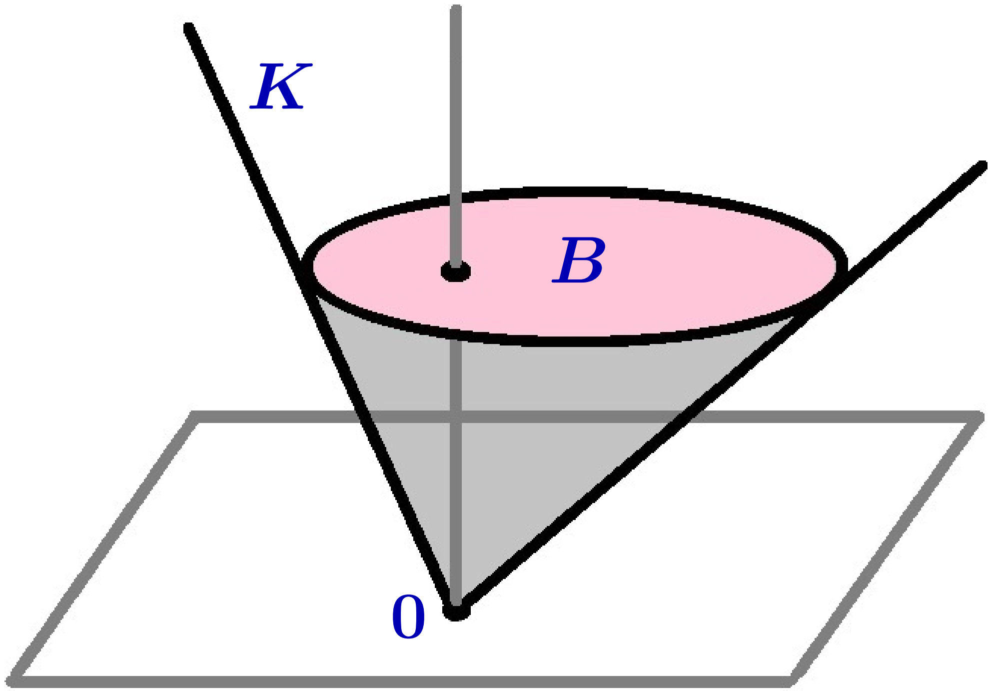
Выпуклое множество $C \subseteq X$ называется *архимедовым*,
если $(\forall\, x, y \in X)\big(\, (\forall\, n \in \mathbb{N})(x + \frac{1}{n}y \in C) \;\Rightarrow\; x \in C\,\big)$.

Множество C *замкнуто в направлении* y,
если $(\forall\, x \in X)\big(\, \inf\{\varepsilon > 0 : x + \varepsilon y \in C\} = 0 \;\Rightarrow\; x \in C\,\big)$.



База конуса

Выпуклое множество $B \subseteq X$ называется ***базой конуса*** K, если $0 \notin B \subseteq K$ и любой лежащий в K луч, выходящий из нуля, пересекает B ровно в одной точке.



База конуса

Выпуклое множество $B \subseteq X$ называется *базой конуса* K, если $0 \notin B \subseteq K$ и любой лежащий в K луч, выходящий из нуля, пересекает B ровно в одной точке.

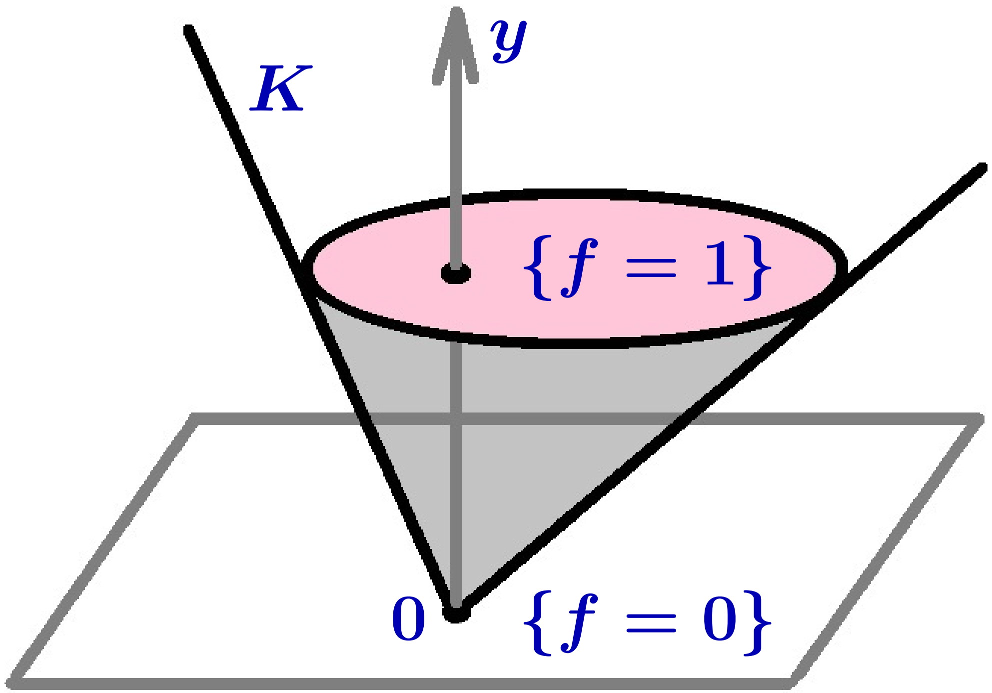
Конус в конечномерном пространстве *архимедов* тогда и только тогда, когда он имеет *компактную базу*.

В бесконечномерном случае этот критерий не работает. Более того, не всякий конус имеет базу.

Критерий архимедовости конуса

Пусть конус (или клин) $K \subseteq X$, линейный функционал f на X и элемент $y \in K$ таковы, что $f \geqslant 0$ на K и $f(y) > 0$.

Клин K *архимедов* $\Leftrightarrow$ K замкнут в направлении y и множество $\{x \in K : f(x) = 1\}$ архимедово.



Когда конус лежит в полупространстве

Пусть конус (или клин) $K \subseteq X$, линейный функционал f на X и элемент $y \in K$ таковы, что $f \geqslant 0$ на K и $f(y) > 0$. ...

Не для всякого конуса K существуют такие f и y.
Если такие f и y есть, то K лежит в полупространстве $\{f \geqslant 0\}$.
Не всякий конус лежит в полупространстве.

Пример такого (неархимедова) конуса:
$X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathbf{fin}}$,
$K = \{x \in X : (\exists\, m \in \mathbb{N})\ x_m > 0,\ x_n = 0$ при $n > m\} \cup \{0\}$.

Другой пример такого (архимедова) конуса:
$X = L^0(\mathbb{R})$,
$K = L^0(\mathbb{R})^+$.

Когда конус лежит в полупространстве

Следующие свойства конуса (или клина) $K \subseteq X$ равносильны:

(1) $(\exists\, f \in X^{\#})(\exists\, y \in K)(\, f \geqslant 0$ на K и $f(y) > 0\,)$,
т. е. K лежит в некотором полупространстве,
причем не полностью на его границе;

(2) $(\exists\, y \in K)(\, -y \notin \mathrm{cl}_{\tau} K\,)$;

(3) K не является τ-плотным в своей линейной оболочке.

Здесь τ — любая локально выпуклая топология на X,
в которой непрерывны все линейные функционалы $f \in X^{\#}$ —
например, слабая топология $\sigma(X, X^{\#})$
или топология Макки $\tau(X, X^{\#})$.

Описание архимедовых выпуклых множеств

Следующие свойства выпуклого множества $C \subseteq X$ равносильны:

- C архимедово;
- C замкнуто в любом направлении;
- пересечение C с любой прямой замкнуто;
- пересечение C с любым подпр-вом размерности $\leqslant 2$ замкнуто;
- пересечение C с любым конечномерным подпр-вом замкнуто;
- $X \setminus C$ алгебраически открыто,
  т. е. совпадает со своей алгебраич. внутренностью (ядром);
- C секвенциально замкнуто в какой-либо векторной топологии;
- C секвенциально замкнуто в сильнейшей локально выпуклой топологии.

Архимедовость и замкнутость

Архимедовость:

$$\alpha_1(n)x_1 + \cdots + \alpha_k(n)x_k \leqslant \beta_1(n)y_1 + \cdots + \beta_m(n)y_m$$
$$\alpha_i(n) \to \alpha_i \qquad \beta_j(n) \to \beta_j$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha_1x_1 + \cdots + \alpha_kx_k \leqslant \beta_1y_1 + \cdots + \beta_my_m$$

Секвенциальная замкнутость:

$$x_n \leqslant y_n \quad \begin{matrix} x_n \to x \\ y_n \to y \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad x \leqslant y$$

Замкнутость:

$$x_\alpha \leqslant y_\alpha \quad \begin{matrix} x_\alpha \to x \\ y_\alpha \to y \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad x \leqslant y$$

Архимедовость и замкнутость

Простым примером незамкнутого архимедова конуса служит $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}})^+$ в любом из банаховых пространств ℓ^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Вопрос:

В каких локально выпуклых пространствах
все *архимедовы* конусы (клинья, выпуклые множества)
замкнуты (секвенциально замкнуты)?

Известно:
(1) Архимедов конус, имеющий непустую внутренность, замкнут.
(2) В конечномерном пространстве архимедовость $\Leftrightarrow$ замкнутость.

До недавнего времени сведения о связи архимедовости и замкнутости фактически исчерпывались этими наблюдениями.

Тотальные и предтотальные пространства

ЛВП назовем (*секвенциально*) *тотальным*, если в нем (секвенциально) замкнуты все подпространства или, что то же самое, (секвенциально) непрерывны все линейные функционалы.

ЛВП назовем (*секвенциально*) *предтотальным*, если в нем (секвенциально) замкнуты все линейно независимые множества.

Тотально $\not\Leftarrow\!\Rightarrow$ Предтотально $\not\Leftarrow\!\Rightarrow$ Секвенциально тотально.

Пример предтотального, но не тотального пространства:
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathbf{fin}}$ со слабой топологией, наведенной $\mathbf{lin}\,\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ или $\mathbf{lin}\,\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

Здесь имеются в виду слабые топологии $\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathbf{fin}}, \boldsymbol{Y})$, наведенные подпространствами $\boldsymbol{Y} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ посредством естественной двойственности $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathbf{fin}} \leftrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: $\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}} \boldsymbol{x_n y_n}$.

Тотальные и предтотальные пространства

ЛВП назовем (*секвенциально*) *тотальным*, если в нем (секвенциально) замкнуты все подпространства
или, что то же самое,
(секвенциально) непрерывны все линейные функционалы.

ЛВП назовем (*секвенциально*) *предтотальным*, если в нем (секвенциально) замкнуты все линейно независимые множества.

Тотально $\not\Longleftarrow\!\!\Longrightarrow$ Предтотально $\not\Longleftarrow\!\!\Longrightarrow$ Секвенциально тотально.

Пример предтотального, но не тотального пространства:
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathbf{fin}}$ со слабой топологией, наведенной $\mathbf{lin}\,\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ или $\mathbf{lin}\,\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

Пример секв. тотального, но не предтотального пространства:
$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{fin}}$ со слабой топологией, наведенной $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{\omega}}$.

Секвенциально тотально $\Leftrightarrow$ Секвенциально предтотально.

Архимедовость и секвенциальная замкнутость

Следующие свойства ЛВП равносильны:

(1) *все архимедовы конусы секвенциально замкнуты*;
(2) все архимедовы клинья секвенциально замкнуты;
(3) все архимедовы множества секвенциально замкнуты;
(4) все подпространства секвенциально замкнуты;
(5) все лин. независимые множества секвенциально замкнуты;
(6) все линейные функционалы секвенциально непрерывны;
(7) пространство *секвенциально тотально*.

Архимедовость и замкнутость (несчетная размерность)

Вопрос о замкнутости архимедовых конусов для случая пространств несчетной размерности удалось решить одним махом:

В любом ЛВП несчетной размерности существует ***незамкнутый архимедов конус***.

Искомым конусом в пространстве $\mathbb{R}^{\boldsymbol{I}}_{\mathbf{fin}}$ с несчетным $\boldsymbol{I}$ служит коническая оболочка множества

$$\Big\{x \in (\mathbb{R}^{\boldsymbol{I}}_{\mathbf{fin}})^{+} : x(j) = 0,\ \sum_{i \in \boldsymbol{I}} x(i) \leqslant 1,\ \sum_{i \in \boldsymbol{I}} \sqrt{x(i)} \geqslant 1\Big\} + \chi_{\{j\}},$$

где $j \in \boldsymbol{I}$.

Идейной предпосылкой этой конструкции стало известное доказательство того факта, что сильнейшая векторная топология на пространстве $\mathbb{R}^{\boldsymbol{I}}_{\mathbf{fin}}$ не является локально выпуклой.

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

Следующие свойства счетномерного ЛВП равносильны:

(1) *все архимедовы клинья замкнуты*;
(2) все архимедовы множества замкнуты;
(3) все подпространства замкнуты;
(4) все линейные функционалы непрерывны;
(5) пространство *тотально*.

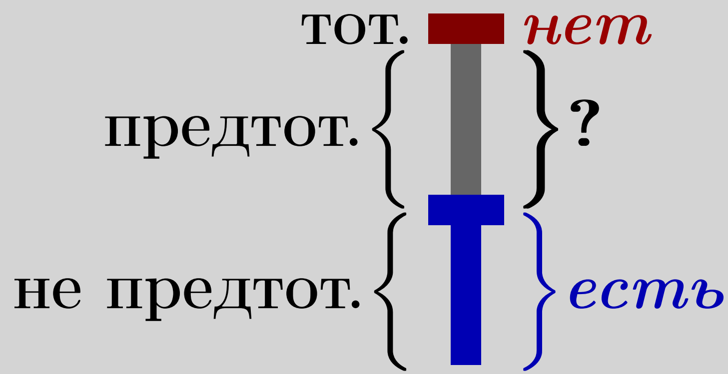
В отличие от случая клиньев аналогичная задача для *конусов* в пространствах счетной размерности оказывается более сложной.

Пространства, в которых все архимедовы конусы замкнуты

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

К 2015 г. для счетномерных ЛВП было известно следующее:

- В *тотальных* пространствах нет незамкнутых архимедовых конусов.
- В *не предтотальных* пространствах есть незамкнутые архимедовы конусы.



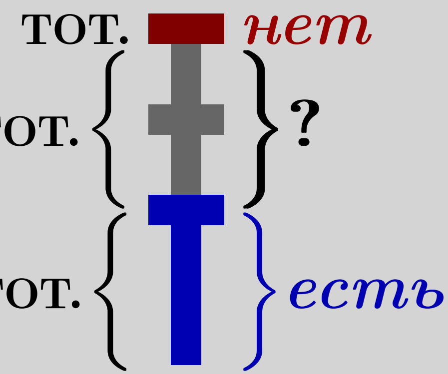
Для *предтотальных, но не тотальных* счетномерных ЛВП вопрос о существовании незамкнутых архимедовых конусов *оставался открытым*.

Технически вопрос сводится к исследованию слабых топологий $\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}, Y)$, наведенных подпространствами $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ посредством естественной двойственности $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}} \leftrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: $\langle x \mid y \rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n$.

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

К 2015 г. для счетномерных ЛВП было известно следующее:

- В *тотальных* пространствах нет незамкнутых архимедовых конусов.
- В *не предтотальных* пространствах есть незамкнутые архимедовы конусы.



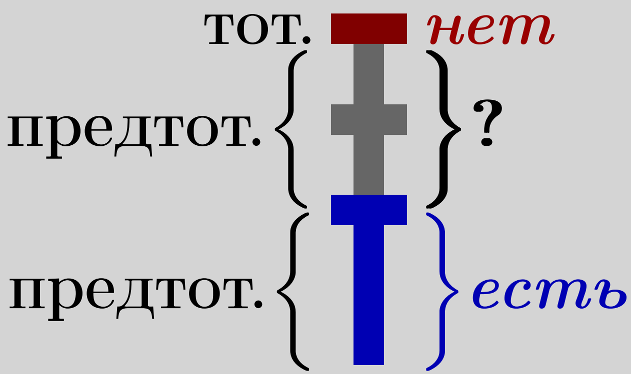
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathbf{fin}}$ со слабой топологией, наведенной $\mathbf{lin}\,\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ или $\mathbf{lin}\,\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$

Вопрос 4.9 в статье: ***Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Матюхин А. В.*** Незамкнутые архимедовы конусы в локально выпуклых пространствах // Владикавк. мат. журн. 2015. Т. 17, вып. 3. С. 36–43.

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

К 2018 г. для счетномерных ЛВП было известно следующее:

- В *тотальных* пространствах нет незамкнутых архимедовых конусов.
- В *не предтотальных* пространствах есть незамкнутые архимедовы конусы.



$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathbf{fin}}$ со слабой топологией, наведенной $\mathbf{lin}\,\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ или $\mathbf{lin}\,\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$

Сторожук К. В. Тонкие гиперплоскости // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т. 15. С. 1553–1555.

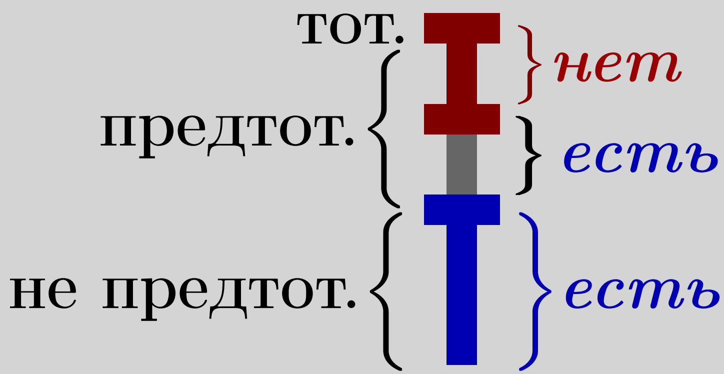
Пусть $\boldsymbol{L}\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ — любое линейное продолжение $\mathbf{lim}\colon \boldsymbol{c} \to \mathbb{R}$.
Тогда в $\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathbf{fin}}, \underbrace{\mathbf{ker}\,\boldsymbol{L}}_{\text{гиперплоскость}})$ *есть* незамкнутый архимедов конус.

Пространства, в которых все архимедовы конусы замкнуты

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

В 2021 г. для счетномерных ЛВП стало известно следующее:

- В *тотальных* пространствах нет незамкнутых архимедовых конусов.
- В *не предтотальных* пространствах есть незамкнутые архимедовы конусы.



$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathbf{fin}}$ со слабой топологией, наведенной $\mathbf{lin}\,\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ или $\mathbf{lin}\,\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$

Иван Александрович Емельяненков: *нет.*

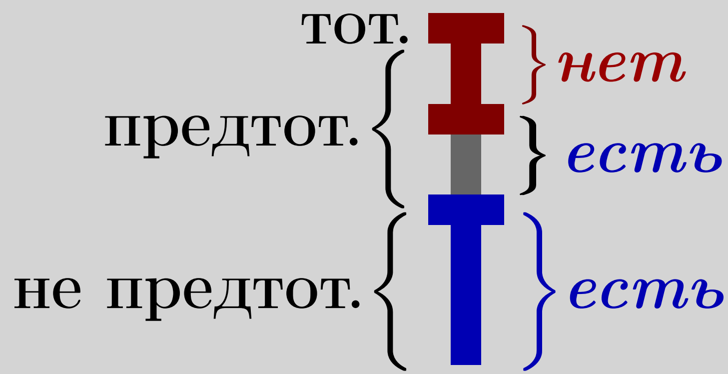
Иван Александрович Емельяненков: *есть* (описана «граница»).

Емельяненков И. А. Максимальные и архимедовы конусы в векторных пространствах // Выпускная работа магистра. 2021.

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

В 2021 г. для счетномерных ЛВП стало известно следующее:

- В *тотальных* пространствах нет незамкнутых архимедовых конусов.
- В *не предтотальных* пространствах есть незамкнутые архимедовы конусы.



$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathbf{fin}}$ со слабой топологией, наведенной $\mathbf{lin}\,\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ или $\mathbf{lin}\,\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$

Иван Александрович Емельяненков: *нет.*

Иван Александрович Емельяненков: *есть* (описана «граница»).

Емельяненков И. А. Максимальные и архимедовы конусы в векторных пространствах // Выпускная работа магистра. 2021.

Гутман А. Е., Емельяненков И. А. Локально выпуклые простр-ва, в которых все архимедовы конусы замкнуты // СМЖ. 2023. Т. 64, № 5. С. 945–970.

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

Множество $C \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ назовем *прелестным*, если оно выпуклое, компактное ($\Leftrightarrow$ замкнутое и ограниченное) и содержит такой элемент x, что $\pi_n x$ — внутренняя точка $\pi_n C$ для всех $n \in \mathbb{N}$, где $\pi_n \colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^n$, $\pi_n x = \big(x(1), \dots, x(n)\big)$.

Пусть Y — векторное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

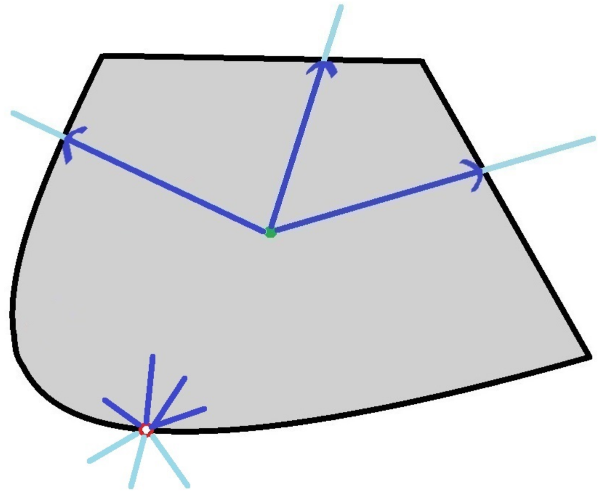
В пространстве $\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}, Y)$ все архимедовы конусы замкнуты $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ Y пересекается с каждым прелестным подмножеством $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

Множество $C \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ назовем *прелестным*, если оно выпуклое, компактное ($\Leftrightarrow$ замкнутое и ограниченное) и содержит такой элемент x, что $\pi_n x$ — внутренняя точка $\pi_n C$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Такие x — это *квазивнутренние точки* множества C.

Пусть C — выпуклое множество в лок. выпуклом пространстве X.

Точку $x \in C$ называют *алг. внутренней* и пишут $x \in \operatorname{core} C$, если клин $\mathbb{R}^{+}(C - x)$ совпадает с X.



Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

Множество $C \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ назовем *прелестным*, если оно выпуклое, компактное ($\Leftrightarrow$ замкнутое и ограниченное) и содержит такой элемент x, что $\pi_n x$ — внутренняя точка $\pi_n C$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Такие x — это *квазивнутренние точки* множества C.

Пусть C — выпуклое множество в лок. выпуклом пространстве X.

Точку $x \in C$ называют *алг. внутренней* и пишут $x \in \operatorname{core} C$, если клин $\mathbb{R}^+(C - x)$ совпадает с X.

Точку $x \in C$ называют *квазивнутренней* и пишут $x \in \operatorname{qi} C$, если клин $\mathbb{R}^+(C - x)$ всюду плотен в X
или, что то же самое, $(C - x)^{\oplus} = \{0\}$.

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

Множество $C \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ назовем *прелестным*, если оно выпуклое, компактное ($\Leftrightarrow$ замкнутое и ограниченное) и содержит такой элемент x, что $\pi_n x$ — внутренняя точка $\pi_n C$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Такие x — это *квазивнутренние точки* множества C.

Пусть Y — векторное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

В пространстве $\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}, Y)$ все архимедовы конусы замкнуты $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ Y пересекается с каждым прелестным подмножеством $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Если Y не пересекается с каким-либо прелестным $C \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, то $C^{\oplus}$ — пример архимедова незамкнутого конуса в $\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}, Y)$.

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

Множество $C \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ назовем *прелестным*, если оно выпуклое, компактное ($\Leftrightarrow$ замкнутое и ограниченное) и содержит такой элемент x, что $\pi_n x$ — внутренняя точка $\pi_n C$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Такие x — это *квазивнутренние точки* множества C.

Пусть Y — векторное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

В пространстве $\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}, Y)$ все архимедовы конусы замкнуты $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ Y пересекается с каждым прелестным подмножеством $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Теперь стало очевидно, что в нашей таинственной топологии $\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}, \mathrm{lin}\, \mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$ все архимедовы конусы замкнуты, так как в любом прелестном подмножестве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ есть элемент $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

Множество $C \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ назовем *прелестным*, если оно выпуклое, компактное ($\Leftrightarrow$ замкнутое и ограниченное) и содержит такой элемент x, что $\pi_n x$ — внутренняя точка $\pi_n C$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Такие x — это *квазивнутренние точки* множества C.

Пусть Y — векторное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

В пространстве $\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}, Y)$ все архимедовы конусы замкнуты $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ Y пересекается с каждым прелестным подмножеством $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Теперь стало очевидно, что в топологии К. В. Сторожука
$\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}, \ker L)$ есть незамкнутый архимедов конус,
так как $\ker L$ не пересекается с прелестным $\prod_{n\in\mathbb{N}}[1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}]$.

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

Множество $C \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ назовем *прелестным*, если оно выпуклое, компактное ($\Leftrightarrow$ замкнутое и ограниченное) и содержит такой элемент x, что $\pi_n x$ — внутренняя точка $\pi_n C$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Такие x — это *квазивнутренние точки* множества C.

Пусть Y — векторное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

В пространстве $\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}, Y)$ все архимедовы конусы замкнуты $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ Y пересекается с каждым прелестным подмножеством $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Теперь стало очевидно, что в некоторых предтотальных пространствах есть незамкнутые архимедовы конусы, так как $Y = \mathrm{lin} \prod_{n\in\mathbb{N}} \{2^m : m > n\}$ не пересекается с прелестным $[1, 2]^{\mathbb{N}}$, хотя в $\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}, Y)$ все линейно независимые множества замкнуты.

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

Множество $C \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ назовем *прелестным*, если оно выпуклое, компактное ($\Leftrightarrow$ замкнутое и ограниченное) и содержит такой элемент x, что $\pi_n x$ — внутренняя точка $\pi_n C$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Такие x — это *квазивнутренние точки* множества C.

Пусть Y — векторное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

В пространстве $\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\text{fin}}, Y)$ все архимедовы конусы замкнуты $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ Y пересекается с каждым прелестным подмножеством $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

В общем, всё, что было неочевидным или неизвестным, вдруг стало очевидным.

Впрочем, как обычно, появились новые вопросы.

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

Гутман А. Е., Емельяненков И. А. Локально выпуклые простр-ва, в которых все архимедовы конусы замкнуты // СМЖ. 2023. Т. 64, № 5. С. 945–970.

9.1. Квазилокальная ограниченность. В параграфе 5 предпринято лишь начальное изучение понятия квазилокальной ограниченности. В рамках более детального исследования было бы уместно прояснить взаимосвязи между следующими свойствами хаусдорфова локально выпуклого пространства X и, в частности, выяснить, какие из них равносильны:

(a) X квазилокально ограничено;

(b) всякое выпуклое подмножество X с непустой квазивнутренностью содержит ограниченное подмножество с непустой квазивнутренностью;

(c) в X существует ограниченное множество с непустой квазивнутренностью;

(d) в X существует плотное субнормируемое подпространство;

(e) для любого плотного клина $W \subset X$ существует субнормируемое подпространство $Z \subset X$ такое, что $Z \cap W$ плотно в X;

(f) всякое плотное подпространство X содержит плотное субнормируемое подпространство.

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

9.2. Пределы квазилокально ограниченных пространств. Пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ представляет собой обратный предел $\varprojlim \mathbb{R}^n$ последовательности $(\mathbb{R}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ в категории локально выпуклых пространств относительно естественных проекций $\pi_n\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^n$ и $\pi_{nm}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $(n \leqslant m)$. Анализ доказательств теорем 4.13 и 5.10 позволяет выдвинуть гипотезу о том, что утверждения этих теорем допускают обобщение на случай произвольных обратных пределов. А именно, пусть $(X, (\pi_i)_{i\in I})$ — обратный предел сети $(X_i)_{i\in I}$ локально выпуклых пространств. Если C — выпуклое подмножество X, имеет ли место равенство

$$\operatorname{qi} C = \{c \in C : \pi_i c \in \operatorname{qi} \pi_i C \text{ в } X_i \text{ для всех } i \in I\}?$$

Если пространства X_i квазилокально ограничены, обладает ли этим же свойством их обратный предел $\varprojlim X_i$?

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

9.3. Замкнутые тотальные клинья. Теорема 6.11 и ее следствие 6.12 предлагают критерии наследования строгой замкнутости конусов в пространстве, сопряженное к которому квазилокально ограничено. Из доказательства теоремы 6.11 видно, что доказываемое утверждение останется справедливым, если в его формулировке ослабить условие квазилокальной ограниченности пространства до требования квазилокальной ограниченности клиньев вида $K^{\oplus}$ в их квазивнутренних точках, где K — замкнутый конус в сопряженном пространстве.

Таким образом, утверждения теоремы 6.11 и следствия 6.12 сохраняют силу для пространств Z и соответственно X', в которых все замкнутые тотальные клинья квазилокально ограничены в своих квазивнутренних точках. Равносильно ли это условие квазилокальной ограниченности пространства?

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

9.4. Строго замкнутые конусы. Обозначим символами $\triangledown(X)$ и $\triangledown_{\mathrm{s}}(X)$ совокупности замкнутых и строго замкнутых конусов в хаусдорфовом локально выпуклом пространстве X. Если пространство X' квазилокально ограничено, то согласно следствию 6.12 квазиплотность подпространства $Y \subset X'$ равносильна включению $\triangledown_{\mathrm{s}}(X) \subset \triangledown(X|Y)$ и равенству $\triangledown_{\mathrm{s}}(X) = \triangledown_{\mathrm{s}}(X|Y)$. Как с этими утверждениями соотносятся равенства $\triangledown(X) = \triangledown(X|Y)$ и $\triangledown(X|Y) = \triangledown_{\mathrm{s}}(X|Y)$?

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

9.5. Строго замкнутые конусы в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Аналогичный вопрос возникает в связи с теоремой 8.5. Поскольку замкнутые конусы архимедовы, согласно этой теореме из квазиплотности подпространства $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ следует равенство $\nabla\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big|Y\big) = \nabla_{\mathrm{s}}\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big|Y\big)$. Верно ли обратное? Иными словами, можно ли к списку 8.5(a)–(c) добавить утверждение о том, что в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big|Y$ все замкнутые конусы строго замкнуты?

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

9.6. Поляры конусов. Если $K_n \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ — индуктивная последовательность замкнутых конусов, то согласно лемме 8.3 последовательность поляр $(\pi_n K_n)^{\boxplus}$ проективна. Проективна ли в этой ситуации последовательность двойственных клиньев $(\pi_n K_n)^{\oplus}$?

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

9.7. Квазиплотность и проективность. Согласно предложению 8.8 квазиплотность множества $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ равносильна каждому из следующих условий:

(a) S пересекается с любым непустым выпуклым множеством $B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, которое является ограниченным, квазиоткрытым и *проективным*;

(b) S пересекается с любым выпуклым множеством $C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, которое имеет непустую квазивнутренность и является *проективным*.

Существенно ли требование проективности множеств B и C в этих двух условиях? Если исключить проективность, останутся ли эти условия равносильными квазиплотности S в случае, когда S является плотным векторным подпространством $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

9.8. Примеры квазиплотных пространств. Подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, обладающее сформулированными в предложении 8.9 свойствами (a), (b) и (c), назовем соответственно *экспоненциально плотным*, *декартово плотным* и *рекурсивно плотным*. Эти три свойства связаны очевидными импликациями (a)⇒(b)⇒(c) и согласно предложению 8.9 влекут квазиплотность. На данный момент немногочисленный список примеров квазиплотных подпространств $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ включает лишь пространства, экспоненциально плотные в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (см. следствие 8.10). В этой связи возникают три естественных вопроса — о существовании таких квазиплотных подпространств $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, что

(a) Y декартово плотно, но не экспоненциально плотно;
(b) Y рекурсивно плотно, но не декартово плотно;
(c) Y не является рекурсивно плотным.

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

9.9. Коробочная плотность. Согласно предложению 8.8 подмножество пространства $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ квазиплотно тогда и только тогда, когда оно пересекается с каждым непустым проективным квазиоткрытым выпуклым множеством B. Поскольку в число таких множеств B входят открытые коробки (9), образующие базу коробочной топологии на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, отсюда следует, что всякое квазиплотное множество коробочно плотно. Верно ли обратное? Существует ли плотное подпространство $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, являющееся коробочно плотным, но не квазиплотным?

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

9.10. Топологичность квазиплотности. Если ответ на предыдущий вопрос оказывается отрицательным, и коробочная плотность не равносильна квазиплотности, то найдется ли на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ какая-либо иная топология, плотность относительно которой была бы равносильна квазиплотности? Топологична ли квазиплотность для плотных подпространств $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Архимедовость и замкнутость (счетная размерность)

Множество $C \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ назовем *прелестным*, если оно выпуклое, компактное ($\Leftrightarrow$ замкнутое и ограниченное) и содержит такой элемент x, что $\pi_n x$ — внутренняя точка $\pi_n C$ для всех $n \in \mathbb{N}$, где $\pi_n \colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^n$, $\pi_n x = \bigl(x(1), \ldots, x(n)\bigr)$.

Пусть Y — векторное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

В пространстве $\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}, Y)$ все архимедовы конусы замкнуты $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ Y пересекается с каждым прелестным подмножеством $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

В общем, всё, что было неочевидным или неизвестным, вдруг стало очевидным.

Впрочем, как обычно, появились новые вопросы.
И мы уже начали на них отвечать.
Попробуйте нас обогнать! *Спасибо.*